



BZOJ4458-Solution

By jinlifu1999

题目大意 The main idea

- 给定一棵 N 个结点的树，每个结点有一个点权 a_i 。选出 M 条不重复的路径，满足路径上的结点数在 $[L, R]$ 范围内。求点权和的最大值。
- $N, M \leq 500,000$
- 注意：64位整数。

算法1 Algorithm-1

- 暴力 M 次枚举，每次选最大，记录被选过的路径。
- 每次枚举是 $O(NH)$ 的， H 表示树高。
- 时间复杂度： $O(MNH)$
- 期望得分：30

算法2 Algorithm-2

- 我们先来考虑一下链上的情况。
- NOI2010超级钢琴？
- 我们考虑对于每一个起始点 i ，它向后的可以被选择的区间的终点就应该在 $[i + L - 1, i + R - 1]$ 范围内。
- 容易发现第一步一定要选择权值和最大的那一个区间。

算法2 Algorithm-2

- 于是你可以把所有的区间提取出来，插入到一个堆中，每次选一个最大的，然后删掉它，这样进行 M 次就行了。
- 时间复杂度： $O(N^2 + M \log_2 N)$
- 期望得分：30+？

算法3 Algorithm-3

- 我们在算法2的基础上进一步考虑。
- 对于第一步来说，其实对于每个起始结点只需要记录一个最大的区间就行了，因为你要的是最大的。
- 假设我们已经找到了所有对于每个起始结点最大值。
- 每次在堆中取出最大的元素，为了防止再选到这个结点，将其拆为左右两段，依次插入堆中。

算法3 Algorithm-3

- ▶ 我们考虑一下每次计算时需要什么。
- ▶ 首端点为 st ，末端点在某个区间中的所有区间的区间和最大值。
- ▶ 比如当前 $st = 3, L = 2, R = 6$ 。

a_i	-2	1	-4	-5	6	3	-2	-4	7	-1
s_i	-2	-1	-5	-10	-4	-1	-3	-5	2	1

- ▶ 图中黄色为起始点，蓝色为可供选择的区间。

算法3 Algorithm-3

a_i	-2	1	-4	-5	6	3	-2	-4	7	-1
s_i	-2	-1	-5	-10	-4	-1	-3	-5	2	1

- 容易发现，最大值就是 s_i 的最大值-1减掉 s_{st-1} 。
- 快速求区间最大值？
- RMQ!

算法3 Algorithm-3

- 于是，我们先将所有可能成为区间起点的 i 进行处理，将值放入堆中。然后，每次取出一个最大值，将其区间（设为 $[L, R]$ ）拆分成 $[L, pos - 1]$ 和 $[pos + 1, R]$ 两段，其中 pos 表示最大值所在的位置，分别插入堆中。这样做 M 次就行了。
- 时间复杂度： $O((N + M) \log_2 N)$ 或 $O(N + M)$
- 期望得分：30
- 配合上算法1，可以过掉前12组数据。

算法4 Algorithm-4

- 对于树上的情况也是类似。我们预处理出所有的结点到根结点的权值和。
- 还是差分的思想：我们要求最大，那就要减掉的最小。
- 那就求一下减掉的最小就行了。
- 这个你可以仿照倍增的思想，开一个倍增的 min 数组， $min_{i,j}$ 表示 i 向上跳 j 步所能得到的最小值。
- 使用倍增求某段区间的最小值就行了。

算法4 Algorithm-4

- 对付树上的问题，链是关键。
- 只不过树上的麻烦一点就是了。
- 具体实现有一些小细节，比如加一减一之类的，在此不再赘述，代码留给读者编写。
- 时间复杂度： $O((N + M) \log_2 N)$
- 期望得分：100



谢谢观看