《木棍》题解

zbww

November 23, 2020

这道题的 idea 是我在做 ACM-ICPC World Finals 2017 Problem H: Scenery 时想到的一个做法，感觉比较有趣就加个一个条件出了一个题。个人感觉这个做法比 Scenery 的正解好想，不过它多了一个 log 所以过不了 Scenery。

为了方便，我们把问题中的限制转化为对木棍左端点的位置的限制。具体来说，限制一个木棍左端点大于等于 a_i，右端点小于等于 b_i，等价于限制它的左端点在 $[a_i, b_i - k]$ 中。任意两个木棍不能重叠，等价于任意两个木棍的左端点距离至少为 k。一个额外的限制条件 (x_i, y_i, c_i) 等价于左端点在 $[x_i, y_i - t]$ 中的木棍不能超过 c_i 个。显然，假设答案为 yes，存在一种合法方案使得每个木棍的左端点都是整数。

1 Subtask 1

这个子任务是给状压 DP 的。从左到右考虑在哪些位置放置木棍，第一维记录当前正在考虑的位置，第二维状态记录哪些编号的木棍已经被放置即可。

2 Subtask 2

这个子任务即是那道 WF 题，不过数据范围比那道题小。$O(n^2)$ 的做法可以参考官方题解，当然这道题的正解也能通过这个子任务。

3 Subtask 3

这个子任务是一个对正解方向的提示。

$k = 1$ 相当于对左端点的距离没有限制 (只要不重叠就行)。假设给定一个 (可能是) 所有木棍左端点位置的 (无序) 集合，那么判定这个集合是否合法就变成了一个匹配问题，可以用 Hall 定理来判定。对于一个方案，定义

它对应的 01 序列 w：$w_i=1$ 当且仅当某个木棍的左端点在点 i。那么 Hall 定理中的条件成立，等价于对于每个 w 上的区间，都有一个对这个区间内的元素和至少为某个值的限制。而额外的 m 个限制可以看作的区间和上界的限制。$0\le w_i\le 1$ 也可以看作是对一个长度为 1 的区间的和的上下界的限制。

设 $s_i=\sum_{j\le i} w_i$，那么这个些限制就变成了一个对 s 的差分约束问题。只需判断是否存在负环即可。由于值域和 n 到很小，可以直接 spfa 判定。假设值域与 n,m 同级，时间复杂度为 $O(n^3)$。

4 Subtask 4

继续沿着 Subtask 3 的方向思考，任意两个木棍左端点距离至少为 k，等价于对于任意 i 都有 $s_i-s_{i-k}\le 1$，所以这也可以看作对 s 的差分约束问题。

然而 Subtask 4 中值域比较大，不能把所有点建出来跑差分约束。我们考虑在这个差分约束上额外加一些边。假设区间 $[i,j]$ 内包含 $h(i,j)$ 个 $[a_i,b_i-k]$。那么对于所有的 $i\le j$，我们都从点 j 到点 $i-1$ 连一条权为 $-h(i,j)$ 的边，我们把这种边称为第一类边。对于任意的 $i\le j$，我们从点 i 到点 j 连一条权值为 $\lceil\frac{j-i}{k}\rceil$ 的边，我们把这种边称为第二类边。这样会多加一些边，但是显然不影响负环是否存在。我们把 m 条额外的限制对应的边称为第三类边，把所有作为 a_i-1,x_i-1,b_i,y_i 出现过的点称为关键点。假设图中存在负环，任取一个负环。如果负环上有连续两条第一类边或连续两条第二类边，可以合并成一条，使得环的权值和不增。这样我们可以使得环上不存在连续两条第一类边或连续两条第二类边。任意考虑环上一条终点不为关键点的边。这条边和它的下一条边显然都不能是第三类边。假设这条边是第一类边，则下一条边是第二类边，把它的终点调整为右侧第一个关键点不会使环的权值增加。假设这条边是第二类边，则下一条边是第一类边，把它的终点调整为左边第一个关键点不会使环的权值增加。所以我们总是可以通过调整使得环上所有点都是关键点。

现在我们只需考虑关键点的导出子图是否存在负环。得到了一个 $O(n^3)$ 算法。

5 Subtask 5

这个 Subtask 被卡时过了 TAT。

考虑关键点的导出子图，新建一个点作为源，向每个点连一条 0 权边。不存在负环等价于存在从这个点出发的单源最短路。设 $dis[d][u]$ 表示从源出发最多走 d 步到 u 的最短路 (不存在则为 ∞)，那么我们可以对所有 u 求

出 $dis[$点数$][u]$，如果这构成一个最短路 (检验是否可以松弛)，那么就没有负环，否则就有负环。

事实上，我们不需要把所有边建出来，$dis[d]$ 到 $dis[d+1]$ 的转移可以用线段树优化，以 $O(n \log n)$ 的复杂度计算。

总复杂度为 $O(n^2 \log n)$，可以通过本题。